Algebra - Stage Malignani
Problemi avanzati

Nunzio Alexandro Letizia

Scuola Superiore
dell'Università degli Studi di Udine

Febbraio 15, 2017

Coefficienti di un polinomio monico

Proposizione (Formula di Viete)

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio monico, allora:*

- *la somma delle radici è* $-a_{n-1}$*;*
- *il prodotto delle radici* $(-1)^n a_0$*.*

Coefficienti di un polinomio monico

Proposizione (Formula di Viete)

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio monico, allora:*

- *la somma delle radici è* $-a_{n-1}$*;*
- *il prodotto delle radici* $(-1)^n a_0$*.*

Esempio

Se x_1, x_2 sono le radici di $p(x) = x^2 + x + 1$, trovare

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Coefficienti di un polinomio monico

Problema

Sia $p(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{2017}$. Calcolare:

1. $\sum a_k$ (somma dei coefficienti);
2. $\sum a_{2k}$ (somma dei coefficienti di indice pari);
3. $\sum a_{3k}$ (somma dei coefficienti di indice multiplo di 3).

Coefficienti di un polinomio monico

Problema

Sia $p(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{2017}$. Calcolare:

1. $\sum a_k$ (somma dei coefficienti);
2. $\sum a_{2k}$ (somma dei coefficienti di indice pari);
3. $\sum a_{3k}$ (somma dei coefficienti di indice multiplo di 3).

Soluzione

1. 4^{2017};
2. 2^{4033};
3. $\frac{4^{2017}+2}{3}$.

Teorema

Dati $n+1$ punti nel piano Cartesiano con ascisse distinte, esiste un unico polinomio di grado minore o uguale a n tale che la funzione polinomiale associata passi per quei punti.

Teorema

Dati $n+1$ punti nel piano Cartesiano con ascisse distinte, esiste un unico polinomio di grado minore o uguale a n tale che la funzione polinomiale associata passi per quei punti.

Esempio

Sia $p(x)$ un polinomio di quarto grado (al più) tale che $p(0) = 1, p(1) = 2, p(2) = 5, p(3) = 10, p(4) = 17$. Allora l'unico polinomio che soddisfa le ipotesi è $p(x) = x^2 + 1$.

Problema

Si indebolisca l'ipotesi dell'esempio precedente, prendendo un polinomio di quinto grado *a coefficienti interi*. Sapendo che $p(5)$ è positivo, quanto può valere al minimo?

Problema

Si indebolisca l'ipotesi dell'esempio precedente, prendendo un polinomio di quinto grado *a coefficienti interi*. Sapendo che $p(5)$ è positivo, quanto può valere al minimo?

Soluzione

146.

Problema

Sia a_n una successione di interi definitiva per ricorrenza lineare nel seguente modo

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Sia $p(x)$ un polinomio di sesto grado tale che $p(i) = a_i, \forall i = 1, \ldots, 7$. Quanto vale $p(8)$?

Problema

Sia a_n una successione di interi definitiva per ricorrenza lineare nel seguente modo

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Sia $p(x)$ un polinomio di sesto grado tale che $p(i) = a_i, \forall i = 1, \ldots, 7$. Quanto vale $p(8)$?

Soluzione

29.

Problema

Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2016 tale che $p(x) = (-1)^x, \forall x = 0, 1, \ldots, 2016$. Quanto vale $p(2017)$?

Interpolazione

Problema

Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2016 tale che $p(x) = (-1)^x, \forall x = 0, 1, \ldots, 2016$. Quanto vale $p(2017)$?

Soluzione

$2^{2017} - 1$.

Esempio

Fattorizzare negli interi

1. $x^3 - 1$;
2. $x^7 + x^2 + 1$ (Hint: Quanto vale il polinomio in W_3^1?);
3. $x^d + 1$ con d dispari.

Fattorizzazione negli interi

Esempio

Fattorizzare negli interi

1. $x^3 - 1$;
2. $x^7 + x^2 + 1$ (Hint: Quanto vale il polinomio in W_3^1?);
3. $x^d + 1$ con d dispari.

Problema

Dimostrare che $n^4 + 4^n$ è composto per $n > 1$.

Fattorizzazione negli interi

Problema

Fattorizzare negli interi:

1. $x^8 - 98x^4 + 1$;
2. $x^8 + 98x^4 + 1$;
3. $4x^4 - 10x^3 + 21x^2 - 10x + 4$ (Hint: Il polinomio è simmetrico quindi..).

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy Schwarz)

Siano a_i, b_i reali. Allora vale la seguente disuguaglianza

$$\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_i a_i^2\right) \cdot \left(\sum_i b_i^2\right)$$

Esempio

Dimostrare la disuguaglianza AM - QM sfruttando C-S.

Disuguaglianze

Problema

Dimostrare che

$$2^n n! \leq (n+1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disuguaglianze

Problema

Dimostrare che

$$2^n n! \leq (n+1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema

Dimostrare che

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Disuguaglianze

Problema

Siano a, b, c reali positivi tali che $a + b + c = abc$, dimostrare che

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Disuguaglianze

Problema

Siano a, b, c reali positivi tali che $a + b + c = abc$, dimostrare che

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Soluzione

Hint: Provare il cambio di variabile $a = \tan(\alpha)$..

Esempio

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases}$$

Esempio

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases}$$

Soluzione

Effettuare il cambio di variabile $a + b = S$, $ab = P$..

Problema

Sapendo che

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=7 \\ a^3+b^3+c^3=13, \end{cases}$$

calcolare

$$a^4+b^4+c^4.$$

Problema

Sapendo che

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=7 \\ a^3+b^3+c^3=13, \end{cases}$$

calcolare

$$a^4+b^4+c^4.$$

Soluzione

Effettuare il cambio di variabile $a+b+c=S$, $ab+ac+bc=Q$, $abc=P$ e sfruttare $a^2+b^2+c^2=S^2-2Q$, $a^3+b^3+c^3=S(S^2-3Q)+3P$..

Radici coniugate

Esempio

Siano x_1, x_2 le radici di $p(x) = x^2 - x - 1$. Dimostrare che $x_1^n + x_2^n$ è intero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Radici coniugate

Esempio

Siano x_1, x_2 le radici di $p(x) = x^2 - x - 1$. Dimostrare che $x_1^n + x_2^n$ è intero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soluzione

$x_1^n + x_2^n = (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})..$

Radici coniugate

Problema (Finale Cesenatico 2011)

.. Se x è l'unica soluzione reale positiva di $x^2 - 29x - 10 = 0$, quanto vale x^{2011}?.. Prendi la parte intera e poi dimmi le ultime due cifre del numero che ottieni ..

Radici coniugate

Problema (Finale Cesenatico 2011)

.. Se x è l'unica soluzione reale positiva di $x^2 - 29x - 10 = 0$, quanto vale x^{2011}?.. Prendi la parte intera e poi dimmi le ultime due cifre del numero che ottieni ..

Soluzione

19. (Hint: Una delle due radici ha modulo minore di 1 quindi se elevata alla 2011..).