La serie e la sua convergenza

Presa una successione di elementi $\{a_n\}$, si definisce **serie** associata ad $\{a_n\}$ la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Esempi di serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{e^{\sin n+3}}, \quad \sum_{n=2014}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{ne^n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(\cos(e^{n+\tan(n^a)}))}{n^a - \sqrt{n \cdot \sinh n^a}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Una serie è **convergente** al limite $|L| < +\infty$ se la relativa successione delle somme parziali converge a L, ovvero

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L = \lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Teorema – Condizione necessaria(1.1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty \;\rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Condizione necessaria ma non sufficiente affinché una serie converga è che il termine generale sia infinitesimo per $n \to +\infty$.

Mostriamo l'importanza di questa condizione con due esempi/esercizi.

Esempio (1.1)
Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \sqrt{n}$$

Soluzione (1.1)
Affinché la serie possa convergere è necessario che il termine generale sia infinitesimo, ovvero che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = 0$$

Ma ciò è palesemente falso, segue dunque che la serie diverge all'infinito.

Esercizio (1.2)
Trovare un esempio di serie divergente con termine generale infinitesimo (mostrare che non vale l'implicazione inversa del teorema precedente).

Soluzione (1.2)
La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

soddisfa la richiesta.

Teorema – Criterio integrale (1.2)
Sia $f: [1, +\infty] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una funzione positiva e decrescente, allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

hanno lo stesso carattere.

Il precedente criterio è molto utile per discutere il carattere della funzione zeta $\zeta(s)$ di Riemann con s reale

Esempio (1.3)
Discutere al variare del parametro reale s il carattere della funzione

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Soluzione (1.3)
Escludiamo subito il caso in cui $s \leq 0$, in quanto la serie divergerebbe (basta ribaltare).
Ora possiamo applicare il criterio integrale viste le ipotesi soddisfatte:

$$\int \frac{1}{n^s} = \begin{cases} \frac{1}{(-s+1)n^{s-1}} \text{ se } s \neq 1 \\ \ln n \text{ se } s = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} +\infty \text{ se } 0 < s < 1 \\ \frac{1}{s-1} \text{ se } s > 1 \\ +\infty \text{ se } s = 1 \end{cases}$$

Ciò significa che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} \text{diverge se } s \leq 1 \\ \text{converge } se\ s > 1 \end{cases}$$

In particolare otteniamo l'importantissima relazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} > +\infty$$

Si noti come sia proprio l'esponente 1 il massimo valore di s per avere divergenza. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1,0000..1}} < +\infty$$

Diremo che una certa proprietà P_n vale *definitivamente* se esiste un naturale n_0 tale che P_n vale $\forall n > n_0$

Teorema – Criterio del confronto (1.3)
Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi. Se

$$a_n < b_n \; definitivamente$$

allora si ha:

$$1. \sum b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$2. \sum a_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}$$

Esempio (1.4)
Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^7}$$

Soluzione (1.4)
Il termine generale può essere così trasformato

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{n^7} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{n^7} = \frac{1}{n^{7-\frac{1}{n}}}$$

Inoltre

$$\frac{1}{n^{7-\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n^6} < +\infty$$

Ovvero, la serie converge per confronto con $\frac{1}{n^6}$

Esercizio (1.5)
Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3}$$

Soluzione (1.5)
Lavoriamo per confronto:

$$\frac{n^2+2}{n^3+3} > \frac{n^2}{n^3+3} > \frac{n^2}{n^3+3n^3} = \frac{n^2}{4n^3} = \frac{1}{4n} > +\infty$$

Quindi la serie diverge per confronto con $\frac{1}{n}$

Teorema – Criterio di Leibniz (1.4)
Se $\{a_n\}$ è una successione monotona e convergente a 0, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$$

è convergente

Esempio (1.6)
Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

Soluzione (1.6)
La serie è convergente (a cosa?) per Leibniz.

Esercizio (1.7)
Dimostrare che non vale la proprietà commutativa nelle somme infinite ovvero che non è possibile permutare a piacere l'ordine degli addendi in una serie

Soluzione (1.7)
Consideriamo la serie appena studiata. Essa è convergente per Leibniz ed in particolare converge a $\ln 2$, un numero minore di 1. Se fosse possibile commutare a piacere gli addendi, allora potremmo, partendo da 1 prendere tanti termini del tipo

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

con n pari e sommarli tra loro fino ad ottenere un valore minore di -1. Ma a questo punto possiamo prendere tanti termini del tipo

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

con n dispari e sommarli fino ad ottenere un valore maggiore di 1. Ripetendo questo procedimento infinite volte non otterremo mai un limite compreso tra -1 ed 1 in contraddizione con il limite $\ln 2$.
Ne segue che le somme infinite non godono della proprietà commutativa.

Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum |a_n|$ converge.

Teorema (1.5)
Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente

Esempio (1.8)
Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^2}$$

Soluzione (1.8)
Ricordiamo la metodologia per risolvere questo tipo di esercizio.

1. Verificare che il termine generale a_n tende a 0 se $n \to +\infty$. Vero
2. Utilizzare se possibile il confronto. Qua non è possibile perché i termini non sono tutti positivi
3. Sfruttare qualche criterio in relazione al tipo di termine generale a_n

In questo caso ci torna utile lavorare con il valore assoluto, infatti

$$\left|\frac{\sin n + \cos n}{n^2}\right| \leq \frac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} < +\infty$$

Quindi visto che la serie è assolutamente convergente, allora è anche convergente.

Teorema – Criterio della radice (1.6)
Sia $\sum a_n$ una serie tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

allora

1. Se $l < 1$ la serie converge assolutamente
2. Se $l > 1$ la serie non converge
3. Se $l = 1$ nulla si può dire sul carattere della serie

Esempio (1.9)
Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

Soluzione (1.9)
Usiamo il criterio della radice.

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

Quindi la serie converge (a cosa?).

Teorema – Criterio del rapporto(1.6)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non nulli tali che

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$$

e

1. Se $l < 1$ la serie converge assolutamente
2. Se $l > 1$ la serie non converge
3. Se $l = 1$ nulla si può dire sul carattere della serie

Esempio (1.10)
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$$

Soluzione (1.10)
Usiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

La serie è convergente.

Esercizio (1.11)
Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{F_n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\cdots$$

dove F_n indica l'ennesimo numero di Fibonacci
Soluzione (1.11)
Usiamo il criterio del rapporto.
E' noto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \varphi > 1$$

Quindi la serie diverge.

Esercizi supplementari (per gli interessati)

Esercizio (1.12)
Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

Soluzione
Diverge (usare il criterio integrale).

Esercizio (1.13)
Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$$

Soluzione
Diverge ($\ln n! < \ln n^n = n \ln n$).

Esercizio (1.14)
Discutere il carattere della seguente serie in funzione del parametro α

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}$$

Soluzione
Convergenza se $\alpha > 2$

La serie geometrica

La serie geometrica è una somma infinita di termini facenti parte di una progressione geometrica.
Nel campo olimpico assume un'importanza notevole e per questo motivo è utile mostrarne esempi variegati.

Teorema (1.1)

$$\sum_{m=0}^{n} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dimostrazione (1)
Consideriamo la somma parziale

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = S$$

e moltiplichiamola per – q

$$-q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} = -Sq$$

Ora sommiamo le due relazioni ed otteniamo

$$1 - q^{n+1} = S(1 - q)$$

Da cui ($q \neq 1$)

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Dimostrazione (2)
Dimostriamolo per induzione.
Passo base: $n = 1 \rightarrow 1 + q = \frac{1-q^2}{1-q}$
Supponiamo che sia vera la relazione con n
Passo induttivo: $n + 1$, allora

$$\sum_{m=0}^{n+1} q^m = q^{n+1} + \sum_{m=0}^{n} q^m = q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

□

Corollario (1.1)
Se $|q| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

Dimostrazione
Se $|q| < 1$ è vero che

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Esercizio (1.1)
Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n}$$

in funzione del parametro intero $|a| > 1$

Soluzione

In questo caso $q < 1$ e $q \to 0$ di conseguenza è vero che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$$

Nel caso particolare in cui $a = 2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Esercizio (1.2)
Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

Soluzione

In questo particolare esercizio non è possibile sfruttare immediatamente la serie geometrica in quanto non stiamo sommando termini a rapporto costante.
L'idea è invece quella di sommare infinite serie tramite una distribuzione piramidale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\ (1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\ (2) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\ (3) + \cdots$$

$$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3^0}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1-\frac{1}{3^1}}{1-\frac{1}{3}}\ (1)$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1-\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}\ (2)$$

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1-\frac{1}{3^3}}{1-\frac{1}{3}}\ (3)$$

$$\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1-\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3}}\ (4)$$

Se sommiamo $(1) + (2) + (3) + \cdots + (n)$ con $n \to +\infty$ otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}n - 3\frac{n+1-\frac{3}{2}}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}n - \frac{6n+6-9}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Esercizio (1.3) (livello avanzato)
Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Soluzione
Consideriamo la funzione cosi definita:

$$f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot a^n}$$

con a maggiore di 1 e deriviamola rispetto ad a

$$\frac{df}{da} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{a^{n+1}} = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots\right) = -\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}} - 1 - \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}\right)$$

Confrontando gli estremi si ottiene

$$\frac{df}{da} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}$$

ovvero

$$df = \frac{da}{a} - \frac{da}{a-1}$$

e se integriamo ambo i membri

$$f(a) = \int df = \int \frac{da}{a} - \int \frac{da}{a-1} = \ln a - \ln(a-1)$$

cioè

$$f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot a^n} = \ln\left(\frac{a}{a-1}\right)$$

In particolare

$$f(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$$

La serie di Taylor

La serie di Taylor, di una funzione in un punto x_0, è la rappresentazione della funzione stessa come serie di termini calcolati tramite un processo di derivazione infinita della funzione considerata nel punto x_0.

Si può dimostrare che una funzione derivabile infinite volte in x_0 può essere approssimata, nella maniera migliore, tramite una somma infinita di soli polinomi, mediante la seguente formula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Dove $f^n(x_0)$ indica la derivata n-esima della funzione calcolata nel punto x_0.

Se $x_0 = 0$ la serie viene chiamata di MacLaurin.

Esempio (1.1)
Espandere in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = e^x$.

La funzione calcolata in 0 vale 1, infatti $f(0) = e^0 = 1$.
La derivata prima della funzione esponenziale, è la funzione esponenziale stessa dunque $f^1(0) = 1$, e cosi via $f^n(0) = 1$.
L'espansione in serie di Taylor corrispondente risulterà essere:

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \cdots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ovvero

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Esempio (1.2)
Espandere in serie di MacLaurin la funzione $f(x) = \sin x$

$f(0) = \sin 0 = 0$
$f^1(x) = \cos x \rightarrow f^1(0) = \cos 0 = 1$
$f^2(x) = -\sin x \rightarrow f^2(0) = 0$
$f^3(x) = -\cos x \rightarrow f^3(0) = -1$
$f^4(x) = \sin x$ e quindi ricomincia il ciclo.
Possiamo dunque scrivere che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

ovvero

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

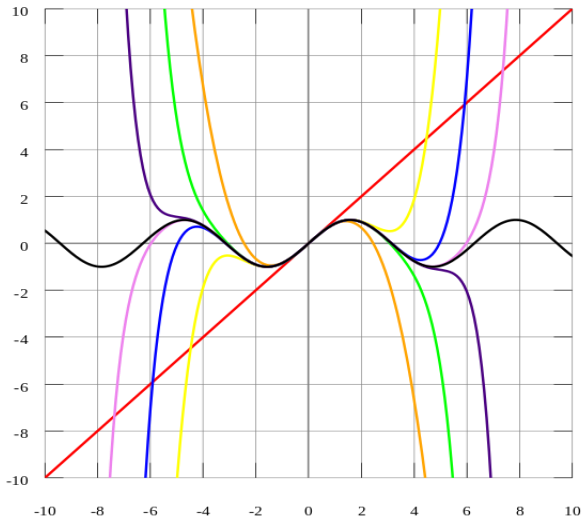
Alcune espansioni da ricordare:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$



Approssimazione graduale di $f(x) = \sin x$

La formula di Eulero (1.1)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dimostrazione

Sviluppiamo in serie di Taylor $f(x) = e^{ix}$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

dove ricordiamo che per definizione $i^2 = -1$.
Raggruppiamo i termini così:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i \sin x$$

Da cui per $x = \pi$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

□

Esercizio (1.1)
Mostrare che

$$\sqrt{x+1} \sim 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

per x "piccoli".

Soluzione

Espandiamo in serie di Taylor $f(x) = \sqrt{x+1}$ e tronchiamo l'espansione al secondo ordine:
$f(0) = \sqrt{1} = 1$
$f^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \to f^1(0) = \frac{1}{2}$
$f^2(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} \to f^2(0) = -\frac{1}{4}$

$$\sqrt{x+1} \sim 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Esercizio (1.2)

(a) Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(b) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare (a grandi spanne) che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} > +\infty$$

Soluzione

(a) Ricordiamo che

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Se calcoliamo $\ln(2)$ otteniamo proprio quello che vogliamo ovvero

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(b) Cosa succede se calcolassimo $\ln(-1+1)$?

$$\ln(0) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

Ma visto che $\ln(0)$ non è definito, possiamo esclusivamente lavorare con i limiti infatti

$$\ln(0^+) = -\infty = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots$$

In conclusione

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$$

Esercizio (1.3)

Espandere in serie di MacLaurin la funzione razionale fratta:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Soluzione

E' facile notare che derivare e utilizzare la formula di Taylor non è molto vantaggioso vista la mole di conti. E' utile invece notare che in un intorno sufficientemente piccolo di 0

$$\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1-(-x^n)} = 1 + (-x^n)^1 + (-x^n)^2 + (-x^n)^3 + \cdots = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + \cdots$$

Tenendo presente che per $m \to +\infty$ e $|q| < 1$ si ha

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Esercizio (1.4)
Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Soluzione
Consideriamo una funzione definita così:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Allora $f(1)$ sarà la nostra risposta.
Deriviamo ora la funzione rispetto ad x

$$\frac{df}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Ma per quanto visto prima vale che

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

In definitiva avremo

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{df}{dx}$$

ovvero

$$\frac{dx}{1+x^2} = df$$

e se integriamo ambo i membri otteniamo

$$\arctan(\mathrm{x}) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int df = f(x)$$

La soluzione è dunque

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio (1.5) per gli interessati
Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$$

Soluzione

$$\frac{\pi\sqrt{3} + \ln(8)}{9}$$

Esercizio (1.6) per gli interessati
Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \frac{5^2}{4!} + \cdots$$

Soluzione
$5e$

La serie di Fourier (breve accenno)

La serie di Fourier nasce nel tentativo di voler approssimare qualsiasi funzione come combinazione lineare delle funzioni trigonometriche $\cos x$ e $\sin x$.
La forma è la seguente:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

con a_k e b_k coefficienti adatti per avere convergenza uniforme con la funzione da approssimare.
Si può infatti dimostrare che i coefficienti sono univocamente determinati una volta conosciuta la funzione da approssimare, infatti vale che

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Infine la funzione espressa come serie di Fourier risulterà

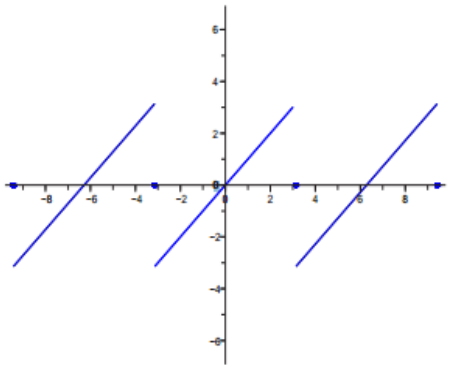
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Uguaglianza di Parseval (1.1)
Se $a_n \to 0,\ b_n \to 0$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

Esempio (1.1)
Espandere in serie di Fourier la funzione di periodo $2\pi,\ f(x) = x$
Soluzione
La funzione è dispari nel suo dominio quindi $a_n = 0$.
Inoltre

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -2\cdot\frac{(-1)^n}{n}$$



In conclusione

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nx)$$

Notiamo che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La funzione ζ(2) e il problema di Basilea

Teorema (1.1)
La funzione ζ(2) è convergente
Dimostrazione
Consideriamo le seguenti due serie:

$$1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1+1=2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1$$

E' chiaro che preso il termine generale, con $n>1$, si ha che

$$\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-n}$$

allora

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}<\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}$$

ovvero (aggiungendo 1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n}<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}$$

La tesi segue quindi immediatamente, infatti:

$$1<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<2$$

□

Ma esiste una forma chiusa per esprimere $\zeta(2)$?

Il primo a porsi questo problema fu nel 1644 Pietro Mengoli che però non riuscì, insieme ad altri matematici dell'epoca, a trovare la formula tanto ricercata.

Ci pensò allora Eulero, che nel 1735 (aveva solo 28 anni) risolse il famosissimo problema di Basilea. La sua soluzione resta ancora oggi la dimostrazione più semplice per calcolare la somma esatta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Nella presentazione saranno proposte due dimostrazioni differenti.

Prerequisiti per la dimostrazione di Eulero: Serie di Taylor e un po'di algebra olimpica.
Prerequisiti per la dimostrazione con Fourier: Serie di Fourier e teoria dell'integrazione.

Teorema (1.2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrazione (1)
Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor di $\sin x$ centrato in 0:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Se dividiamo per x gli estremi:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Ora se consideriamo il membro di destra un polinomio in x, le radici di tale polinomio saranno $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
Sostituiamo $z = x^2$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

Le nuove radici del polinomio in z, saranno dunque $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$
Consideriamo ora il polinomio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con radici x_1, x_2, x_3.
Quanto vale

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \; ?$$

E' facile notare che

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}$$

Ma quanto vale il numeratore? Per le regole dei polinomi, il numeratore è pari a $\frac{a_1}{a_3}$ ed il denominatore è pari a $-\frac{a_0}{a_3}$ quindi la somma richiesta è $-\frac{a_1}{a_0}$ indipendentemente dal coefficiente del termine di grado massimo.

Estendiamo il ragionamento anche al nostro polinomio in z.
Se le radici sono $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$ quanto vale

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots ?$$

Per quanto visto prima (a meno di un segno, che dipende dal grado del nostro polinomio "infinito"), abbiamo che

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Da cui la tesi:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

N.B. La dimostrazione per poter essere rigorosa, andrebbe arricchita di una spiegazione efficace e completa sulla trattazione dei polinomi "infiniti" come polinomi finiti.

Teorema (1.2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrazione (2)
L'idea è quella di sviluppare la funzione $f(x) = x^2$ tramite la serie di Fourier.
Ricordiamo che per definizione di serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Per il teorema sui coefficienti della serie di Fourier, abbiamo che:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Ora, per semplificarci i calcoli dei coefficienti a_n e b_n è utile notare che la funzione è pari dunque valgono le seguenti relazioni (dimostrazione per esercizio)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \cdots = 4\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = 0$$

Inserendo quanto trovato:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \qquad x \in]-\pi, \pi]$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Extra (per gli interessati): con il risultato appena ottenuto è possibile calcolare $\sum \frac{1}{n^4}$
Vale infatti l'uguaglianza di Parseval se $a_n \to 0,\ b_n \to 0$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

$$\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{2}{5}\pi^4 \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Esercizio (1.1)
Sapendo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Soluzione (1.1)
Ciò che ci chiede il problema è calcolare

$$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Tenendo presente che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

In conclusione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Esercizio (1.2)
Sapendo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrare che

$$\sum_{p} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}$$

con p primo.

Soluzione (1.2)

$$\sum_{p} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \sum_{p=7} \frac{1}{p^2}$$

Aggiungendo e sottraendo $\frac{1}{4^2}$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \sum_{p=7} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{\pi^2}{24} \cong 0{,}49985 < \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 1 – Problema 1 IMO 1979
Siano p e q interi positivi primi tra loro tali che

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}$$

Allora

$$1979|p$$

Soluzione
Proviamo ad ottenere una somma di soli numeri positivi dalla quale poi sottrarre solo termini positivi in questo modo:

$$1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\cdots$$

Cosi facendo otteniamo

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{1319}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{659}\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right)$$

cioè

$$\sum_{n=660}^{1319}\frac{1}{n}=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

Ma se consideriamo il primo denominatore con l'ultimo e così via notiamo che la loro somma è sempre costante e pari a 1979, infatti se sommiamo le varie frazioni scelte così in coppia otteniamo

$$\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{1979}{660\cdot 1319}+\frac{1979}{661\cdot 1318}+\cdots+\frac{1979}{989\cdot 990}=$$

$$=1979\left(\frac{1}{660\cdot 1319}+\frac{1}{661\cdot 1318}+\cdots+\frac{1}{989\cdot 990}\right)=1979\cdot\sum_{k=660}^{989}\frac{1}{k\cdot(1979-k)}=1979\cdot\frac{p_1}{q}$$

Ci resta solo da mostrare che $1979\nmid q$. Notiamo infatti dall'ultima uguaglianza che tutti i denominatori della forma

$$k(1979-k)$$

sono coprimi con 1979 visto che questo numero è primo, dunque il loro minimo comune multiplo non potrà mai essere divisibile per 1979, segue la tesi.

Esercizio 2 – Problema 1 Cesenatico 2014, finale nazionale gara a squadre
Prima di partire alla ricerca del padre Ellisseo, il giovane Teoremaco intende ingraziarsi la dea Mathena, per cui consulta un oracolo e ottiene come responso: "Calcola il numero

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015\cdot 2016}$$

riduci il risultato ottenuto ai minimi termini e scopri qual è il più grande fattore primo che divide il denominatore. Dovrai sacrificare altrettanti tori alla dea Mathena".
Di quanti tori sta parlando l'oracolo?
Soluzione
Dobbiamo calcolare

$$\sum_{n=1}^{2014}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

L'idea è quella di trovare un modo furbo per esprimere il termine generale, infatti

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

Calcoliamo A,B,C usando il principio d'identità dei polinomi

$$A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)=0n^2+0n+1$$

che risolvendo il sistema allegato dà come soluzione $(A,B,C)=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$, il che si traduce

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$$

In conclusione il termine generale avrà la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\quad(1)$$

Se ora consideriamo il termine successivo, esso sarà

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\quad(2)$$

ed è quindi facile notare come gli ultimi due termini della (1) coincidano con i primi due della (2). Quali sono i termini che non si elideranno?
I primi due della prima somma con gli ultimi due dell'ultima somma, in sostanza:

$$\sum_{n=1}^{2014}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2015\cdot 1008-2016+2015}{2015\cdot 2016}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2014\cdot 2017}{2015\cdot 2016}$$

Visto che $2015=5\cdot 13\cdot 31$ e $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$, la risposta è 31.
Osservazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$$

Esercizio 3
E' possibile estrarre da

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

una serie geometrica con somma

$$\frac{1}{5} \text{ o } \frac{1}{7} \text{ ?}$$

Soluzione
Se esiste, la serie geometrica avrà questa forma:

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^{a+b}} + \frac{1}{2^{a+2b}} + \cdots = \frac{1}{m}$$

Quindi

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^{a+b}} + \frac{1}{2^{a+2b}} + \cdots = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^b}} = \frac{2^{b-a}}{2^b - 1} = \frac{1}{m}$$

Ora se $a = b$ basta scegliere $a = b = 3$ per ottenere come somma $\frac{1}{7}$ infatti

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{7}$$

Mentre se $a \neq b$ sicuramente ci sarà un fattore 2 al numeratore che non si semplificherà e quindi non sarà mai possibile ottenere $\frac{1}{5}$.

Esercizio 4 $(*)$
Sia $\{a_n\}$ la sequenza così definita

$$a_n = \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \cdots + \binom{n}{n}^{-1}$$

Qual è il massimo valore che può assumere a_n? Converge se $n \to +\infty$?
Soluzione
Supponiamo che n sia pari. Visto che $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, abbiamo che

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[\binom{n}{k}^{-1} + \binom{n}{n-k+1}^{-1} \right] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[k \binom{n-1}{k-1}^{-1} + (n-k+1) \binom{n-1}{n-k}^{-1} \right]$$

e tenendo conto che $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$

$$a_n = 1 + \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-1}{k-1}^{-1} = 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot a_{n-1}$$

Il caso con n dispari è da trattare similmente.
Abbiamo dunque ottenuto una successione definita per ricorrenza dove

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 1 + \dfrac{n+1}{2n} \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Se calcoliamo i primi valori notiamo che

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{8}{3}, a_4 = \frac{8}{3}, a_5 = \frac{13}{5}, a_6 = \frac{151}{60} \ldots$$

e che $a_3 < a_4 > a_5$.
Sembrerebbe che a_4 sia il massimo e che la successione sia decrescente per $n > 4$.
Se riusciamo a dimostrare la monotonia per $n > 4$ allora la successione ammette limite per $n \to +\infty$.

Dimostriamo che la successione è decrescente per $n \geq 4$.
<u>Parte 1</u>

$$a_{n-1} > 2 + \frac{2}{n-1} \quad \text{se } n > 4$$

<u>Dimostrazione parte 1</u>
Usiamo l'induzione; supponiamo la tesi sia vera per n, $n > 4$, dimostriamola per $n+1$.

$$a_n > 2 + \frac{2}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot a_n > 2 + \frac{2}{n} \overset{\text{ip.ind}}{\Longleftrightarrow} 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot \left(2 + \frac{2}{n-1}\right) > 2 + \frac{2}{n}$$

$$\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n(n-1)} > 1 + \frac{2}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(n-1)} > 1 + \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n-1} > 1$$

□

Parte 2

$$a_n < a_{n-1} \text{ se } n > 4$$

Dimostrazione parte 2

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot a_{n-1} < a_{n-1} \Leftrightarrow 2n + n \cdot a_{n-1} + a_{n-1} < 2n \cdot a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2n < (n-1) \cdot a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} > \frac{2n}{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} > 2 + \frac{2}{n-1}$$

Vero per quanto dimostrato prima, quindi la successione è decrescente

□

Ci resta solo trovare a che valore converge la successione per $n \to +\infty$.
Se la successione ammette limite l, ciò significa che $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$ e che quindi $a_{n+1} \sim a_n \sim l$ se $n \to +\infty$.
Allora è vero che

$$a_n = 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot a_{n-1} \to \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{n+1}{2n} \cdot a_{n-1} \Leftrightarrow l = 1 + \frac{l}{2}$$

Da cui $l = 2$.

Il prodotto di Eulero

Il prodotto di Eulero è una formula dimostrata dallo stesso matematico svizzero nel 1737. Riveste un'importanza capitale in quanto lega la funzione zeta di Riemann con la distribuzione dei numeri primi.

Teorema – Prodotto di Eulero(1.1)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

con p primo

Dimostrazione

La dimostrazione è semplice oltre che geniale.
Partiamo dalla definizione della funzione zeta di Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (1)$$

Se moltiplichiamo gli estremi per $\frac{1}{2^s}$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots \quad (2)$$

Sottraiamo la (2) dalla (1)

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots \quad (3)$$

E così abbiamo eliminato tutti i denominatori multipli di 2. Facciamo la stessa cosa moltiplicando gli estremi per $\frac{1}{3^s}$

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \cdots (4)$$

Sottraiamo la (4) dalla (3)

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

E così abbiamo eliminato anche tutti i denominatori multipli di 3. Se facciamo la stessa cosa con i multipli di 5 otterremo:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \cdots$$

E così via fino ad eliminare tutti i denominatori nel membro di destra ed ottenere:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

□

Teorema (1.2)
I numeri primi sono infiniti.
Dimostrazione
Offriamo una dimostrazione alternativa (rispetto a quella classica di Euclide).
Analizziamo il caso in cui $s = 1$:

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-1}} = \prod_{p} \frac{p}{p-1} = \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

Ma noi sappiamo, per quanto visto in precedenza, che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} > +\infty$$

cioè che diverge all'infinito.

Supponiamo per assurdo che i numeri primi siano finiti, allora il prodotto di Eulero sarà finito e quindi assumerà un certo valore finito M. Ciò è chiaramente impossibile vista la divergenza della serie armonica. Segue quindi la tesi.

□